III. *Tractatus de* Curvarum *Constructione & Mensura; ubi plurimæ series Curvarum Infinitæ vel rectis mensurantur vel ad simpliciores Curvas reducuntur. Autore* Colin Maclaurin, *in Collegio novo* Abredonensi *Matheseos Professore.*

EXimiæ Matheseos Theoriæ, ob infinitam Propositionum Universalitatem, æternam ac necessariam Veritatem, Evidentiam omni dubitatione majorem, Idearum claritatem luculentissimam, Demonstrationum elegantiam, Theorematum nexus & mutuas dependentias, pulcherrimis certè ac summis humani intellectus repertis sunt annumerandæ; inter eas vero eminent summorum hujus sæculi Philosophorum de Curvarum Longitudinibus & areis mensurandis ardua Theoremata. Ad hos diffusos cognitionis campos diu altè latentes tandem eruendos infinitæ scientiæ portiunculam mutuari, vix sibi temperare posset quin pronuntiaret, qui Arithmeticæ Infinitorum vires in immenso elegantissimarum Veritatum abysso eruendo, & humani intellectus Horizontem infinite ferè extendendo, paucis præteritis annorum decadibus, amplè satis comprobatas, animo perpenderit; Hujus vero methodi (sicut nunc aucta & exculta est) ope, incidi in rationem mensurandi infinitas Curvarum series, quam paucissimis explicabo.

Cum in omni linea curva sit aliqua curvaturæ regularitas licet fortè implicata, secundum quam figura determinatur; ideo Geometræ varias Curvarum characteres ex Æquatione Ordinatarum relationem ad abscissas axis alicujus exprimente definirunt. Cum verò idem fieri possit ex consideratione Curvarum respectu unius dati centri,

into

imo simplicissima Naturæ uniformitas in ejus indagine id fieri sæpe postulet, ideo hanc Curvas considerandi Methodum impræsentiarum usurpabimus, & imprimis ostendemus qua facillima ratione (secundum hanc Methodum Curvas determinandi) ex simplicibus complexiores construi possint.

§ I. Sint L & *l* puncta quamproxima in Curva B *l* L; sit *l o* arcus centro S descriptus perpendicularis in S L; & erit L *l* ut momentum Curvæ & L *o* momentum Radii S L: Ac si detur ratio L *l* ad L *o*, vel ad *l o* in distantia S L, dabitur æquatio Curvæ ad centrum S. Sint L P, *l p* Tangentes Curvæ in punctis L & *l*, in quas ex S demittantur normales S P, S *p* iis occurrentes in punctis P & *p*; similiter in omnes Curvæ Tangentes demittantur perpendiculares ex dato puncto S & construetur Curva transiens per omnes Tangentium & perpendiculorum intersectiones. Hujus triangulum elementare P *n p* simile erit triangulo L *o l*, quæ proinde dabitur ex data Curva B *l* L. Quippe ob æquales S *n p*, P *n* L, & rectos S *p n*, S P L æquiangula erunt triangula S *p n*, P *n* L, & proinde P *n* : *pn* :: L *n* : S *n* :: L *o* : *l o*, adeoq; ob angulos P *n p*, S *n* L, L *o l* æquales, erunt triangula P *n p*, S *n* L, L *o l* similia. Cum igitur eadem sit ratio L *l* ad *l o* quæ P *p* ad *p n*, & S L ad S P, manifestum est datâ ratione L *l* ad *l o*, & rectâ S L, dari rationem P *p* ad *p n* & rectam S P, adeoque Curvam D P *p*. Eadem ratione ex D P construi potest Tertia, & ex ea dein Quarta, & progrediendo prodibit series Curvarum infinita, quæ omnes ex uno dato innotescunt. Quod si erigantur L N &

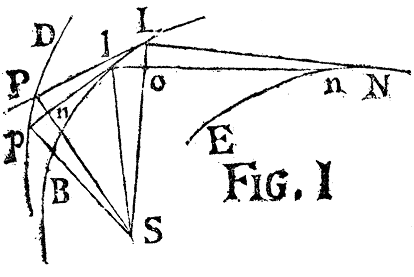


FIG. I

& $l\,n$ perpendiculares in radios S L, S l, ſibi mutuo occurrentes in n; & per omnia ſimiliter definita perpendicularium concurſuum puncta deſcribatur Curva E N: ea ipſa erit Curva ex qua deduci poteſt B L, eadem ratione qua conſtruximus D P ex B L. Ex E N ſimiliter conſtrui poteſt alia Curva, atque ex hac quoque parte Series infinita Curvarum conſtrui poterit.

§ II. Curvarum verò hac ratione conſideratarum ſimpliciſſimæ ſunt quarum L l eſt ad L o in ratione poteſtatis alicujus Radii, ita ut, ſi a ſit data quantitas, r denotet Radium Curvæ, n numerum quemcunque, ſit L l ad $l\,o$ ut a^n ad r^n æquatio earum generalis. Omnes verò hæ Apſidem habent cum $r = a$, quoniam in eo caſu L $l = l\,o$. Ut inveſtigem æquationem Curvæ D P, cum in B L eſt ut L l ad $l\,o$ ita a^n ad r^n, ita r ad S P$=\frac{r^{n+1}}{a^n}$, ita $\frac{n}{a^{n+1}} \times SP^{\frac{1}{n+1}}$ ad S P, ita $a^{\frac{n}{n+1}}$ ad $SP^{\frac{n}{n+1}}$, ita P p ad $p\,n$. Proinde ſi $\dot{s}$ repreſentet momentum Curvæ, $\dot{y}$ arcum circularem radio deſcriptum à centro S, & r radium correſpondentem, quæcunque ſit Curva cujus Æquatio inveſtigatur, erit Æquatio Curvæ B L, $\dot{s} : \dot{y} :: a^n : r^n$; Æquatio verò Curvæ D P, $\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{n}{n+1}} : r^{\frac{n}{n+1}}$. Angulus autem P S p erit ad Angulum L S l ut $\frac{p\,n}{SP}$ ad $\frac{l\,o}{SL}$, ſive ut $\frac{Pn}{SP}$ ad $\frac{Lo}{SL}$, vel (ſi S P dicatur x & S L, r) ut $\frac{\dot{x}}{x}$ ad $\frac{\dot{r}}{r}$, hoc eſt, (ob $x = \frac{r^{n+1}}{a^n}$) ut $\frac{n+1}{r}\dot{r}$ ad $\frac{\dot{r}}{r}$, ſive ut $n+1$ ad 1. Hinc (*vid. Fig.* II.) B S P eſt ad B S L ut $n+1$ ad 1; unde facilius abſque Tangentium ope duci poteſt Curva B P. Si ſumatur angulus B S P ad B S L in ratione $n+1$ ad 1, & in S P demittatur perpendicularis ex L, erit occurſus perpendiculari cum S P, in Curva B P prius Tangentium ope deſcripta.

§ III. Oſten-

§ III. Ostendimus quo pacto ex unâ series Curvarum infinita deducitur; quo verò pacto singularum longitudines ex illius & unius alterius longitudinibus datis innotescant pergo demonstrare. Cum angulus $SPp = SLl$,

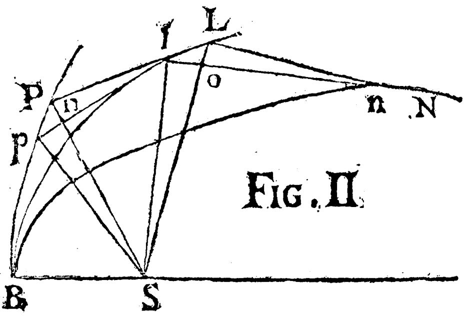


Fig. II

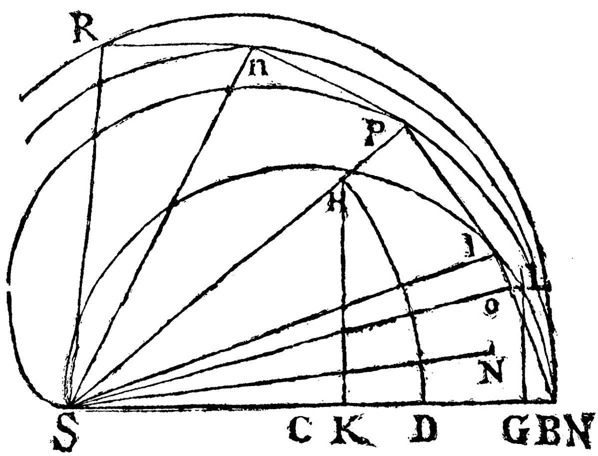
atque LSl sit ad PSp ut 1 ad $n+1$, erit Ll ad Pp ut SL ad $\overline{n+1}\,SP$, sive (ob $SL : SP :: Ll : lo$) ut Ll ad $\overline{n+1}\,lo$, ac proinde $Pp = \overline{n+1}\,lo$: sed $lo = ln - on = ln - LN + Nn$; ergo $Pp = \overline{n+1} \times \overline{ln - LN + Nn}$. Sed $ln - LN$ est momentum rectæ LN normalis in SL, Pp momentum Curvæ BP, & Nn momentum Curvæ BN: Cumque BP, BN, BL simul evanescant in B, erunt in ratione momentorum, adeoque $BP = \overline{n+1} \times \overline{BN + \text{vel} - LN}$. Unde Curva BP est ad summam vel differentiam Curvæ penultimæ in Serie ejusque Tangentis ab intermedia interceptæ, ut $n+1$ ad 1; sive, si m sit Index æquationis Curvæ BP (quoniam $m = \frac{n}{n+1}$) ut 1 ad $1 - m$.

Hinc 1^{mo} in serie Curvarum infinitâ supra descriptâ, si dentur Longitudines duarum proximarum, dabuntur longitudines omnium; quippe mensura cujusvis pendet à mensura penultimæ semper in serie, & proinde unum

par

par omnibus menſurandis ſufficiet: Si una Curva ſit rectis commenſurabilis vel incommenſurabilis, erit integræ ſeriei pars dimidia rectis commenſurabilis vel incommenſurabilis. Hinc 2^{do}. Licet Curvæ B P & B N eſſent rectis incommenſurabiles, differentia tamen Curvæ B P ab $n+1$ Curvæ B N eſſet æqualis aſſignabili rectæ. 3^{tio}. Si Curva tranſit per S, rectâ L N evaneſcente in S, erit $BPS = \frac{BNS}{1-m}$.

§ IV. Curvarum de quibus egimus, quarum nimirum $\dot{s} : \dot{y} :: a^n : r^n$, maxime inſignis eſt Circulus, exiſtente S in circumferentia, cujus æquatio eſt $\dot{s} : \dot{y} :: a : r$, ut ex ſimilitudine triangulorum Lol, B L S (*Fig.* III.)



manifeſtum eſt, adeoque $n=1$; & proinde $m=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$, & æquatio Curvæ B P erit $\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$, quæ ipſa eſt æquatio *Epicycloidis* revolutione Circuli ſuper baſim ſibi æqualem revolventis deſcripti, ad punctum ubi punctum deſcribens tangit baſim, quæ D^no^ *Paſchal* dicitur *la Li-*

maçon de M. Roberval, quamque *M. De la Hire* considerat ut *Conchoidem* Basis Circularis, in Actis Academiæ Parisiensis Anni 1708. Perpendiculares omnes L N, *l n* concurrunt in puncto B, adeoque B N$=0$: unde B P$=\frac{BN+NL}{1-m}=2BL$: Hinc Curva tota B P S$=2$ B S, ac longitudo *Epicycloidis* semper dupla est chordæ arcus in circulo correspondentis. 2*do*. Ex *Epicycloide* describatur Curva B Π S, eadem ratione qua *Epicycloidem* ex Circulo descripsimus: In hoc casu $n=\frac{1}{2}$, & $m=\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$, ac proinde æquatio Curvæ B Π S erit $\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{3}} : r^{\frac{1}{3}}$. Longitudo Curvæ erit $\frac{BL+LP}{1-m}=\frac{3}{2}\overline{BL+LP}=\frac{3}{2}\overline{BL+LG}$, & proinde BΠ est sesquiplus summæ Arcus circularis ejusque Sinus recti. Quod si sumatur C D$=$B D, & radio S D centro S describatur Circulus occurrens rectæ S P in H, & sit H K perpendicularis in B S; quoniam D H$=\frac{3}{2}$B L, erit B Π$=$D H$+$H K. Hinc arcus B Π neque sunt rectis neque arcubus circularibus commensurabiles, differentia tamen arcuum B Π & D H est recta H K. In puncto S evanescit L G. adeoque B Π S$=\frac{3}{2}$B L S, unde tota Curva est sescupla semicirculi. Nulla vero pars hujus Curvæ assignabilis commensurari potest toti, nec integra Curva in data quavis ratione secabilis est, ita ut portiones rationem assignabilem habeant ad se mutuo aut ad totam. Si hæc curva in data aliqua ratione Geometricè secari posset, constaret Quadratura Circuli, nam si *e gr.* esset B Π ad B Π S ut 1 ad m, & B L ad B L S ut 1 ad n, esset BΠ$=\frac{B\Pi S}{m}=\frac{3BLS}{2m}=\frac{3nBL}{2m}=\frac{3}{2}\overline{BL+LG}$, unde esset B L$=\frac{mLG}{n-m}$ & B L S$=\frac{nm}{n-m}$L G. 3*tio* Ex BΠS construatur explicata methodo Curva B R, & quoniam

$n=\frac{1}{3}$

$n = \frac{1}{3}$ erit $m = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}$, atque æquatio Curvæ B R erit $\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{4}} : r^{\frac{1}{4}}$. Hinc longitudo Curvæ fiet $\frac{4}{3}\overline{2BL + P\Pi}$, totalis verò Longitudo Curvæ B R S $= \frac{8}{3}$ diametri S B. Si harum Curvarum Constructiones continuentur, prodibit hujusmodi series Æquationum quæ facile producitur ad libitum.

Æquatio Circuli		1.	$\dot{s} : \dot{y} :: a : r$
	Epicycloidis	2.	$\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$
	Secundi	3.	$\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{3}} : r^{\frac{1}{3}}$
	Tertii	4.	$\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{4}} : r^{\frac{1}{4}}$
	Cujusvis	n.	$\dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{1}{n}} : r^{\frac{1}{n}}$, *&c.*

Observare licet in genere, omnes quarum Indicum denominatores sunt Numeri pares, perfectæ rectificationis esse capaces; cumque quævis sit ad penultimam ut 1 ad $1 - m$, perpendenti manifestum erit Curvæ cujusvis longitudinem fore $= \frac{1}{1-m} \times \frac{1-2m}{1-3m} \times \frac{1-4m}{1-5m} \times \frac{1-6m}{1-7m}$, *&c.* $\times$ S B continuando seriem donec ad nihilum reducatur Fractio. Quod si Indicis denominator sit Numerus impar, Curvæ erunt perfectæ rectificationis incapaces, & earum arcus quicunque erunt sibi mutuo, ipsis totis, rectis quibusvis & arcubus Circularibus incommensurabiles: exprimi verò possunt omnes arcubus circularibus & rectis: At Curvæ cujusvis totalis Longitudo erit ad Semicirculum ut $\frac{1}{1-m} \times \frac{1-2m}{1-3m} \times \frac{1-4m}{1-5m}$, *&c.* ad unitatem. Denique si Areola à Corpore in harum quavis revolvente sumatur constans, hoc est si $r\dot{y} = 1$, subtensa anguli contactus, cui semper (ob datum datâ areâ tempus) proportionalis est *Vis Centripeta* tendens ad S, erit reciproce ut potestas distantiæ cujus Index est $2m + 3$; atque hoc est non contemnendum harum Curvarum privilegium, quod in iis omnibus Vis centripeta tendens ad S sit ut aliqua reciproca distantiæ dignitas, quæ simplicissima est, & utilissima in Naturæ indagine, Virium Centripetarum lex.

§. V. Curvarum quarum $\dot{s} : \dot{y} :: a^n : r^n$ proxime considerand venit (quæ Curva quidem improprie dicitur) ipsa Linea recta, existente S extra rectam. In hac linea, ob similia triangula Ppn, PBS erit (si BS $= a$ & SP $= r$) $\dot{s} : \dot{y} :: r : a$. Ex linea recta methodo directâ

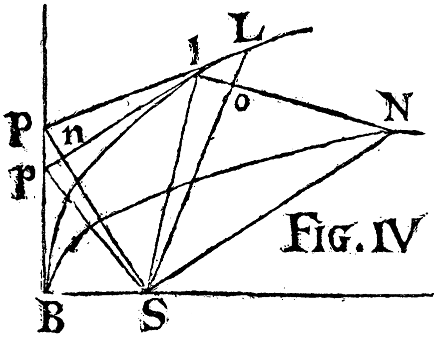


FIG. IV

nihil nisi punctum B construi potest, Methodo vero inversâ, perpendicularium nimirum P L, pl concursu, construi potest Curva, cujus Index (si m sit Index Curvæ BP) æqualis erit $\frac{m}{1-m}$; nam si Index Curvæ BL sit n, erit $m = \frac{n}{n+1}$, ac proinde $n = \frac{m}{1-m}$. Unde in hoc casu, cum $m = -1$ erit $n = \frac{-1}{2}$, & æquatio Curvæ BL erit $\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$, quæ æquatio est Parabolæ ad Focum. Ex hac construe aliam, constituendo angulum LSN $=$ LSB & erigendo LN normalem in SL occurrentem ipsi SN in N. Quoniam vero $m = \frac{-1}{2}$ erit $n = \frac{-1}{3}$, & æquatio Curvæ $\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$ & BP $= \frac{BN-LN}{1-m} = \frac{1}{2}\overline{BN - LN}$, ergo

BN $=$

B N=2B P+L N ; proinde hæc Curva est rectificabilis. Si Series continuetur, prodibunt ut prius æquationes in hoc ordine.

Æquatio Rectæ	$\dot{s} : \dot{y} :: r : a$
Parabolæ	$\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}}$
Secundæ	$\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$
Tertiæ	$\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{4}}$
Cujusvis	$\dot{s} : \dot{y} :: r^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}}$

In hac Serie primæ sunt Recta & Parabola, unde patet dimidiam hujus similiter ac prioris Seriei esse rectis mensurabilem: alia vero dimidia pars in rectis & arcubus Parabolicis exhiberi potest. In his omnibus Vis centripeta ad S est reciproce ut potestas distantiæ cujus Index $3-2m$, ac proinde semper inter duplicatam & triplicatam rationem distantiæ reciproce.

§ VI. Æquatio-Hyperbolæ æquilateræ ad centrum est $\dot{s} : \dot{y} :: r^2 : a^2$, ex qua deducitur methodo directa Series hujusmodi,

$$1.\quad \dot{s} : \dot{y} :: r^2 : a^2$$
$$2.\quad \dot{s} : \dot{y} :: a^2 : r^2$$
$$3.\quad \dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{2}{3}} : r^{\frac{2}{3}}$$
$$4.\quad \dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{2}{5}} : r^{\frac{2}{5}}$$
$$5.\quad \dot{s} : \dot{y} :: a^{\frac{2}{2n-1}} : r^{\frac{2}{2n-1}}$$

Ex his Curvæ, quarum Indicum denominatores sunt in progressione -1, 3, 7, 11, &c. exhiberi possunt in rectis & arcubus Hyperbolicis; reliquæ verò in rectis & arcubus Curvæ cujus æquatio ad axem SB (si x sit abscissa, y verò Ordinata) est $\overline{xx+yy}|^2=a^2x^2-a^2y^2$, quæque construitur (*vid. Fig* III.) bisecando angulum BSL & sumendo

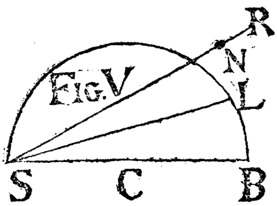
ſumendo SN mediam proportionalem inter SB & SL.

Curvæ quæ ex Hyperbola methodo inverſa conſtrui poſſunt progrediuntur in hac Serie,

$$\text{Hyperbolæ } 1. \quad \dot{s}:\dot{y}::r^{2}:a^{2}$$
$$2. \quad \dot{s}:\dot{y}::r^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{2}{3}}$$
$$3. \quad \dot{s}:\dot{y}::r^{\frac{2}{5}}:a^{\frac{2}{5}}, \text{ \&c.}$$

Ubi Curvæ quarum Indicum denominatores ſunt in progreſſione 1, 5, 9, 13, *&c.* exprimi poſſunt in rectis & arcubus Hyperbolicis; reliquæ verò in rectis & arcubus Curvæ modo explicatæ.

Si aliæ Curvæ deſiderentur quæ alias exhiberent Series, id facillime fieri poteſt ope vel Circuli vel Rectæ: quippe ex earum aliqua omnes, in quibus $\dot{s}:\dot{y}::a^{n}:r$, conſtrui poſſunt, ſumendo, ſi ope Circuli Problema ſit ſolvendum, BSR ad BSL ut 1 ad n, & SN in ipſa SR $= a^{\frac{n-1}{n}} \times SL^{\frac{1}{n}}$; quippe Curvæ per omnia puncta N ductæ æquatio erit $\dot{s}:\dot{y}::a^{n}:r^{n}$. Similiter ope Rectæ conſtrui poſſunt quarum æquatio eſt $\dot{s}:\dot{y}::r^{n}:a^{n}$.



Duas exhibuimus Series infinitas Curvarum rectis commenſurabilium; aliam arcubus circularibus, aliam Parabolicis, aliam Hyperbolicis una cum rectis menſurabiles demonſtravimus: eæ vero ad rectarum menſuram arte ſola infinita reduci poſſe videntur, ſicut æquatione ſola infinita in rectis exprimuntur.

Hæc Cl. Author brevitati ſtudens paucis tradit, illum autem plenius rem pro dignitate ejus illuſtraturum ſperamus.

IV. *Remarks*